

24.3.17
Ορισμός: Μέτρο ενός διανυσματος $\vec{a}$ (συμβ $|\vec{a}|$ ή $\|\vec{a}\|$) και για $\vec{a} = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n \Rightarrow |\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + \dots + a_n^2}$.
 $\sim \dots \sim$

Εσωτερικό γινόμενο 2 διανυσμάτων.
Ορισμός: Η απεικόνιση " $\cdot$ " : $V \times V \rightarrow \mathbb{R}$

ορίζεται ως το εσωτ. γινόμενο των $\vec{a}, \vec{b}$ (συμβ $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle$)

$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ κ' $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3) \in \mathbb{R}^3$. $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b})$

Εσωτερικό γινόμενο αναπαρίσται των συντεταγμένων:

Ορισμός $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$ (απόδειξη ή ισοδυναμία των ορισμών)

Αν το σύστημα αναφοράς μας είναι ορθοκανονικό, δηλαδή βάση τα
 χάρη $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ ($\vec{e}_1 \perp \vec{e}_2, \vec{e}_2 \perp \vec{e}_3, \vec{e}_1 \perp \vec{e}_3$)
 και $|\vec{e}_1| = |\vec{e}_2| = |\vec{e}_3| = 1$.

Τότε έχουμε $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3) = a_1 \cdot \vec{e}_1 + a_2 \cdot \vec{e}_2 + a_3 \cdot \vec{e}_3$
 $\quad \quad \quad \downarrow \quad \quad \quad \downarrow \quad \quad \quad \downarrow$
 $\quad \quad \quad (1,0,0) \quad (0,1,0) \quad (0,0,1)$

Αν το σύστημα αναφοράς τύχει, έστω τότε $\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0, |\vec{x}_0| = |\vec{y}_0| = |\vec{z}_0| = 1$
 (δε χρειάζεσαι να δειχτεί).

$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3) = (a_1 \cdot \vec{x}_0 + a_2 \cdot \vec{y}_0 + a_3 \cdot \vec{z}_0)$

$\vec{b} = (b_1, b_2, b_3) = (b_1 \cdot \vec{x}_0 + b_2 \cdot \vec{y}_0 + b_3 \cdot \vec{z}_0)$

$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 \cdot \vec{x}_0 \cdot \vec{x}_0 + a_1 b_2 \cdot \vec{x}_0 \cdot \vec{y}_0 + a_1 b_3 \cdot \vec{x}_0 \cdot \vec{z}_0 + (a_2 b_1 + a_2 b_2) \vec{y}_0 \cdot \vec{x}_0 +$
 $(a_2 b_3 + a_3 b_1) \cdot \vec{x}_0 \cdot \vec{z}_0 + (a_2 b_3 + a_3 b_2) \vec{y}_0 \cdot \vec{z}_0 + a_3 b_3 \cdot \vec{z}_0 \cdot \vec{z}_0$

Αν το σύστημα ορθογώνιο $\Rightarrow$

$\cos(\vec{x}_0, \vec{y}_0) = \cos(\vec{y}_0, \vec{z}_0) = \cos(\vec{x}_0, \vec{z}_0) = \cos \pi/2 = 0$

$\vec{x}_0 \cdot \vec{x}_0 = |\vec{x}_0|^2$
 $\langle \vec{x}_0, \vec{x}_0 \rangle = |\vec{x}_0| \cdot |\vec{x}_0| \cdot \cos(\vec{x}_0, \vec{x}_0)$

και κανονικά $|\vec{x}_0| = |\vec{y}_0| = |\vec{z}_0| = 1$.

Ιδιότητες Έστω $\vec{a}, \vec{b} \in V \subseteq \mathbb{R}^3$

- 1) Το εσωτερικό γινόμενο των $\vec{a}, \vec{b}$ είναι ΑΡΙΘΜΟΣ.
- 2) $\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle = |\vec{a}|^2 \geq 0$ και $\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle = 0$, αν $\vec{a} = \vec{0}$.
- 3) $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \langle \vec{b}, \vec{a} \rangle$.

$$④ \langle \lambda \vec{a} + \vec{b}, \vec{\gamma} \rangle = \langle \lambda \vec{a}, \vec{\gamma} \rangle + \langle \vec{b}, \vec{\gamma} \rangle = \lambda \langle \vec{a}, \vec{\gamma} \rangle + \langle \vec{b}, \vec{\gamma} \rangle$$

$$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$$

$$\vec{b} = (b_1, b_2, b_3) \Rightarrow \langle \lambda \vec{a} + \vec{b}, \vec{\gamma} \rangle = (\lambda \vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{\gamma} =$$

$$\vec{\gamma} = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) \quad (\lambda a_1 + b_1, \lambda a_2 + b_2, \lambda a_3 + b_3) \cdot (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$$

$$(\lambda a_1 + b_1) \gamma_1 + (\lambda a_2 + b_2) \gamma_2 + (\lambda a_3 + b_3) \gamma_3 = \dots$$

⑤ Το εσωτ. γινόμενο πρέπει να είναι μηδέν, χωρίς να είναι καίριο από τα $\vec{a}, \vec{b} = \vec{0}$.

Π.χ. $\vec{a} = (1, 0, 0)$
 $\vec{b} = (0, -2, -3) \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 1 \cdot 0 + 0 \cdot (-2) + 0 \cdot (-3) = 0$

⑥ Δεν ισχύει η προσαγωγή. $(\vec{a} \cdot (\vec{b} \cdot \vec{\gamma})) \neq (\vec{a} \cdot \vec{b}) \cdot \vec{\gamma}$
 Είναι διάνυσμα $\neq$ διάνυσμα του $\vec{\gamma}$.

⑦ Προφανώς αν $\vec{a} \cdot \vec{b} \neq 0$

$\vec{a} \cdot \vec{b} = \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$ (κάθετη προβολή σε δύο διανυσματικά)

$|\vec{a}| |\vec{b}| \cos(\angle \vec{a}, \vec{b})$ Π.χ. $p_1 = (1, 0, 0)$ | $\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 = 0 \Rightarrow \vec{e}_1 \perp \vec{e}_2$
 $p_2 = (0, 1, 0)$

ΤΙΠΟΤΑΜ: Ισχύουν τα παρακάτω:

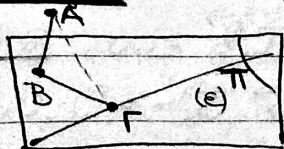
① $|\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle| \leq \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\|$ (ανισότητα Cauchy-Schwarz)

② $\|\vec{a} + \vec{b}\|^2 + \|\vec{a} - \vec{b}\|^2 = 2(\|\vec{a}\|^2 + \|\vec{b}\|^2)$

③ $\|\vec{a} \pm \vec{b}\| \leq \|\vec{a}\| + \|\vec{b}\|$ (τριγωνική ανισότητα)

④ $\|\vec{a} + \vec{b}\|^2 = \langle \vec{a} + \vec{b}, \vec{a} + \vec{b} \rangle = \langle \vec{a}, \vec{a} \rangle + \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle + \langle \vec{b}, \vec{a} \rangle + \langle \vec{b}, \vec{b} \rangle = \|\vec{a}\|^2 + \|\vec{b}\|^2 + 2 \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle$

Εφαρμογή ① (Θεώρημα των 3 καθετών)



* Έστω επίπεδο (π) και ορθός Γ αυτού και ευθεία (ϵ) του επιπέδου.

* Έστω επίπεδο $B \in (\pi)$, αλλά $B \notin (E)$.

* Έστω A σημείο ^{προς} του επιπέδου.

Τότε εάν $\vec{AB} \perp (\pi)$
και $\vec{BF} \perp (E) \Rightarrow \boxed{\vec{AF} \perp (E)}$

Απόδειξη:

Έστω Δ τυχόν επίπεδο της (E) (π.χ. $\Delta = \Gamma$).

Οδο $\vec{AF} \perp \vec{AD}$.

$$\langle \vec{AF}, \vec{AD} \rangle = \langle \vec{AB} + \vec{BF}, \vec{AD} \rangle = \langle \vec{AB}, \vec{AD} \rangle + \langle \vec{BF}, \vec{AD} \rangle$$

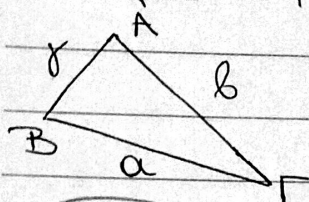
$$= 0$$

$$\Rightarrow \vec{AF} \perp \vec{AD} \Rightarrow \vec{AF} \perp (E).$$

0, καθώς $\vec{AB} \perp (\pi) \Rightarrow \vec{AB} \perp$
σε κάθε διαν.
του (π) .

0, λόγω ②, $\vec{AD} \in (E)$
καθώς

Εφαρμογή ② (νόμος συνημιτόνων σε τυχόν τρίγωνο)



$$\Rightarrow \gamma^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \Gamma \quad (\hat{\Gamma} = (\vec{a}, \vec{b}))$$

$$\vec{BA} = \vec{GA} - \vec{GB}, \text{ Άρα } \|\vec{BA}\|^2 = \langle \vec{BA}, \vec{BA} \rangle$$

$$\vec{BA} = \vec{GA} - \vec{GB}$$

$$= \langle \vec{GA} - \vec{GB}, \vec{GA} - \vec{GB} \rangle =$$

$$= \langle \vec{GA}, \vec{GA} \rangle - \langle \vec{GA}, \vec{GB} \rangle - \langle \vec{GB}, \vec{GA} \rangle + \langle \vec{GB}, \vec{GB} \rangle$$

$$= \|\vec{GA}\|^2 + \|\vec{GB}\|^2 - 2 \cdot \|\vec{GA}\| \cdot \|\vec{GB}\| \cdot \cos(\vec{GA}, \vec{GB})$$

$$= \dots$$

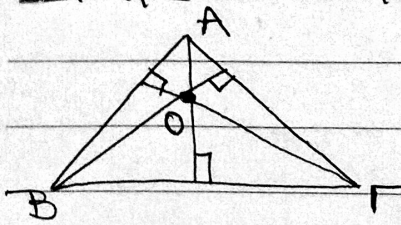
$$\text{αν } \vec{GA} = \vec{b}$$

$$\vec{GB} = \vec{a}$$

$$\vec{BA} = \vec{\gamma}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{αν } \vec{GA} = \vec{b} \\ \vec{GB} = \vec{a} \\ \vec{BA} = \vec{\gamma} \end{array} \right\} \gamma^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \Gamma \quad (\text{όταν } \gamma \text{ η απ. τμήν' του } \vec{\gamma})$$

Εφαρμογή ③ Τα ύψη τυχόν τριγώνου, διέρχονται από το ίδιο σημείο (ερθεμύρος)



Αρκεί να $\vec{GO} \perp \vec{AB}$, δηλαδή αρκεί να $\boxed{\langle \vec{GO}, \vec{AB} \rangle = 0}$

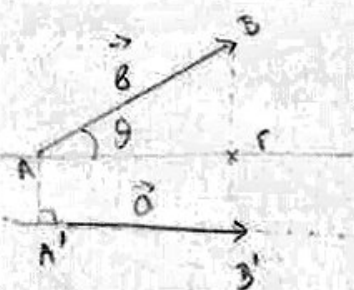
1^ο βήμα: Μετασχηματίζω την γεωμετρία σε αλγεβρα.

1^η απόδειξη $\langle \vec{OA}, \vec{BF} \rangle = 0$, καθώς $\vec{OA}$ ύψος της $\vec{BF}$

$$\Rightarrow \langle \vec{OA}, \vec{OF} - \vec{OB} \rangle = 0. \Rightarrow \boxed{\langle \vec{OA}, \vec{OF} \rangle - \langle \vec{OA}, \vec{OB} \rangle = 0} \quad ①$$

Επίσης $\langle \vec{OB}, \vec{AF} \rangle = 0$ (καθώς $\vec{OB}$ ύψος στην $\vec{AF}$)

ΠΡΟΒΟΛΗ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΟΣ ΣΕ ΔΙΑΝΥΣΜΑ

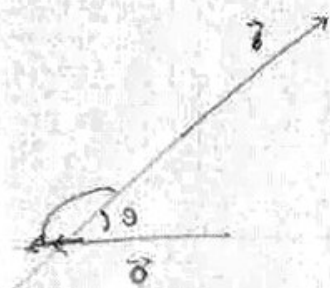


Η προβολή του $\vec{a}$ στο $\vec{b}$ είναι το διάνυσμα με ίδιο το μέτρο του $\vec{a}'$ και φορά την φορά του $\vec{b}$. (Συμβολίζουμε: $\text{pr}_{\vec{b}} \vec{a}$), όπου $\vec{a}', \vec{b}$ τα σημεία κοινά της (ε) με τις κάθετες βε αυτών από τα A, B .

Φέρω παράλληλη από A προς (ε): προφανώς $\vec{AA'} = \vec{BB'}$

$$\Rightarrow \cos \theta = \frac{|\vec{AA'}|}{|\vec{a}|} \Rightarrow |\vec{AA'}| = |\vec{a}| \cos \theta \Rightarrow |\vec{a}'| = |\vec{a}| \cos \theta.$$

ήτοι $\boxed{\text{pr}_{\vec{b}} \vec{a} = |\vec{a}| \cos \theta \cdot \vec{b}}$ (→ έχει δηλαδή την φορά του $\vec{b}$)

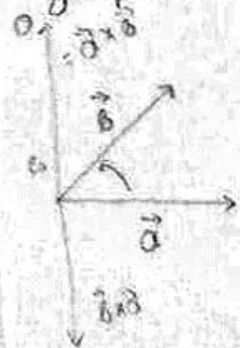


Σε αυτή την περίπτωση θα αγγίξει το πρόσημο, λόγω της φοράς του $\vec{b}$.

Γενικά είναι: $\boxed{\text{pr}_{\vec{b}} \vec{a} = |\vec{a}| |\cos \theta|}$

ΕΞΩΤΕΡΙΚΟ ΓΙΝΟΜΕΝΟ ΔΥΟ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ

ΟΡΙΣΜΟΣ: Έστω $\vec{a}, \vec{b}$ διανύσματα και $\phi = (\vec{a}, \vec{b})$. Ορίζουμε ως εξωτερικό γινόμενο των $\vec{a}, \vec{b}$ ένα νέο ΔΙΑΝΥΣΜΑ έτσι ώστε $\vec{a} \times \vec{b} = \|\vec{a}\| \|\vec{b}\| \sin \phi \cdot \vec{e}$, όπου $\vec{e}$ το κάθετο διάνυσμα στο επίπεδο των $\vec{a}, \vec{b}$ έτσι ώστε "το σύστημα $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{e}\}$ να είναι δεξιόστροφo σύστημα αναφοράς.



δηλαδή πάνω από το $\vec{a}$ και $\vec{b}$ διαγράφοντας την μικρότερη γωνία τότε είναι δεξιόστροφo.